SOBRE AS r-ÉSIMAS CURVATURAS DE HIPERSUPERFÍCIES DA ESFERA n-DIMENSIONAL

Franciane de Brito Vieira (bolsista do PIBIC/UFPI), Paulo Alexandre Araújo Sousa (Orientador, Depto Matemática - UFPI)

Muitos matemáticos têm se dedicado ao estudo da teoria das hipersuperfícies, tentando construir exemplos explicítos ou classificar hipersuperfícies sob uma dada condição geométrica. Um dos trabalhos mais conhecidos é devido a Jellet, em meados do século XVIII, ele mostrou que uma superfície estrelada de curvatura média constante $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ é uma esfera redonda. Hopf obteve uma generalização deste teorema, mostrando que uma superfície imersa $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ com curvatura média constante homeomorfa a uma esfera é também uma esfera redonda. Em 1956, Alexandrov provou que uma hipersuperfície compacta $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante é uma esfera redonda. A prova da conjectura de Bernstein sobre hipersuperfícies mínimas no espaco euclidiano levantou a seguinte especulação sobre a geometria das hipersuperfícies mínimas nas esferas euclidianas:

"Se a imagem da aplicação de Gauss de uma hipersuperfícies compacta mínima M^n da esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ está contida em um hemisfério fechado, então M^n é uma hiperesfera de $\mathbb{S}^{n+1}$"

de Giorgi e Simons, mostraram que a imagem de Gauss de uma hipersuperfície mínima, que não seja um grande hiperesfera, não pode está contida num hemisfério aberto. Posteriormente, Nomizu-Smyth provaram que a especulação acima é verdadeira e pode ser generalizada para superfícies $M^2 \subset \mathbb{S}^3$ com curvatura média constante. No presente trabalho, obtivemos uma versão do resultado de Nomizu-Smyth para hipersuperfícies $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ com H_r constante, sob algumas restrições. Mais especificamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 1. *Seja $M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfícies compacta e conexa com H_{r+1} constante positiva, para $r \in \{0, \cdots, n-2\}$. Assuma que a imagem da aplicação de Gauss de M está contida num hemisfério fechado, $H_r \geq 0$ e $H_1 H_r \geq H_{r+1}$. Então M é totalmente umbílica.*

A demonstração desse teorema segue como consequência do lema abaixo.

Lema 1. *Seja $M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfícies compacta orientável isometricamente imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$, com H_{r+1} constante para algum $r \in \{0, \cdots, n-2\}$. Então*

$$\int_M [(n-r-1)S_1 S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2}] f dM = 0,$$

onde $f = \langle N, v \rangle$, N é um campo unitário normal a M e $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ é um vetor fixo.